13/03/2017

Απόδειξη (Leibnitz)

Θέτουμε $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot b_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι η $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα.

$S_{(2n+2)} - S_{2n} = -b_{2n+2} + b_{2n+1} \geq 0$ αφού b_n φθίνουσα $(b_{2n+1} \geq b_{2n+2})$

ενώ η $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα

$S_{2n+1} - S_{2n-1} = b_{2n+1} - b_{2n} \leq 0$ αφού b_n φθίνουσα $(b_{2n} \geq b_{2n+1})$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $S_{2n} \leq S_{2n+2} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n-1}$

$S_{2n+2} = S_{2n+1} - b_{2n+2}$

και άρα $S_{2k} \leq S_{2m-1}, \forall k,m \in \mathbb{N}$, πράγματι αν $n \geq \max\{k,m\}$

$S_{2k} \leq S_{2n-1} \leq S_{2m-1}$

Άρα, η S_{2n} αύξουσα και άνω φραγμένη (από το S_1)
ενώ S_{2n-1} φθίνουσα και κάτω φραγμένη (από το S_2)

Θέτουμε $a = \lim S_{2n}$
$b = \lim S_{2n-1}$

$a = b$ αφού $a - b = \lim S_{2n} - \lim S_{2n-1} =$
$= \lim(S_{2n} - S_{2n-1})$
$= \lim(-b_{2n}) \to 0$
αφού $b_n \to 0$

Αφού η ακολουθία των αρτίων και των περιττών συγκλίνουν τότε και αυτή συγκλίνει. Άρα $S_n \to 0$.

Θέτοντας $S = a = b$ έχουμε $S_{2n} \to S$, $S_{2n-1} \to S$. Άρα $S_n \to S$
Άρα, S_n συγκλίνουσα

$|S_{2n-1} - S| = S_{2n-1} - S \leq S_{2n-1} - S_{2n} = b_n \Rightarrow |S_{2n-1} - S| \leq b_{2n}$ (1)

Η S_{2n} αύξουσα και τείνει στο S. Άρα $S_{2n} < S$)

$|S_{2n} - S| = S - S_{2n} \geq S_{2n+1} - S_{2n} = b_{2n+1} \Rightarrow$

$|S_{2n} - S| \geq b_{2n+1}$ (2)

Από (1), (2) $|S_n - S| \leq b_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Θεώρημα (Dirichlet) χωρίς απόδειξη

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών ώστε:

α) $b_n \downarrow$ και $b_n \to 0$ ($b_n \geq 0$)

β) Η ακολουθία S_n των μερικών αθροισμάτων της a_n να είναι φραγμένη ($S_n = a_1 + \dots + a_n$ φραγμένη).

$\exists M > 0: |S_n| = M \ \forall n \in \mathbb{N}$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει

Π.χ.

α) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$. Θέτοντας $b_k = \frac{1}{k}$ έχουμε ότι η $b_k \downarrow$ και $b_k \to 0$. Άρα από Leibnitz η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ συγκλίνει.

β) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{3k+5}$, ομοίως συγκλίνει

γ) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k^2+1}$. Θέτοντας $\frac{k+1}{k^2+1} = b_k \geq 0$, $b_k \to 0$

$$b_{k+1} - b_k = \frac{k+2}{k^2+2k+2} - \frac{k+1}{k^2+1} = \frac{(k+2)(k^2+1) - (k+1)((k+1)^2+1)}{(k^2+1)(k^2+2k+2)}$$

$$= \frac{(k^3+2k^2+k+2) - (k^3+3k^2+4k+2)}{(k^2+1)(k^2+2k+2)} = \frac{-k^2-3k}{(k^2+1)(k^2+2k+2)}$$

$$= \frac{\overset{<0}{-k}\,\overset{>0}{(k+3)}}{\underset{>0}{(k^2+1)}\,\underset{>0}{(k^2+2k+2)}}$$

Άρα $b_{k+1} < b_k \Rightarrow b_k$ φθίνουσα
Επομένως, από το κριτήριο Leibnitz
Σx συγκλίνουσα

δ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, x πραγματικός

Για ποια x συγκλίνει και για ποια αποκλίνει

Θέτω $a_k = \frac{x^k}{k}$

$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{|x^k|}{|k|}} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{|k|}} \to x$ από Cauchy η σειρά συγκλίνει

Αν $x=1$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{k}$ που δείξαμε ότι αποκλίνει

Αν $x=-1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ συγκλίνει

~~[illegible]~~

Δυναμοσειρές

Ορισμός
Έστω $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ λέγεται δυναμοσειρά με συντελεστές (a_k) και $x\in\mathbb{R}$.

Ορολογία: Όταν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει θα λέμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει στο x.

Πρόταση
Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές (a_k)

a) Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στο y ($y\neq 0$) και $|x|<|y|$ τότε συγκλίνει απόλυτα και για το x.
β) Αν η δυναμοσειρά αποκλίνει στο y και $|x|>|y|$ τότε αποκλίνει απόλυτα στο x.

Απόδειξη

a) Εφόσον η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cdot y^k$ συγκλίνει $a_k\cdot y^k \to 0$.
Άρα $\exists n_0\in\mathbb{N}: |a_k\cdot y^k|<1 \;\forall k\geq n_0$

Έστω $x\in\mathbb{R}$ με $|x|<|y|$: $|a_k x^k| = |a_k\cdot y^k|\dfrac{|x^k|}{|y^k|} \leq \left|\dfrac{x}{y}\right|^k \;\forall k\geq n_0$

Εφόσον $\left|\dfrac{x}{y}\right|<1$ η γεωμετρική σειρά $\sum\left(\dfrac{x}{y}\right)^k$ συγκλίνει από κριτήρια σύγκλισης έπεται ότι η $\sum_{k=0} a_k\cdot x^k$ συγκλίνει

β) Αν η σειρά συγκλίνει στο x τότε αφού $|y|<|x|$ από α) θα συγκλίνει για το y, άτοπο.

Παρατήρηση: Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση το σύνολο των σημείων για τα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά είναι:
→ $\{0\}$
→ όλο το $\mathbb{R}$
→ διάστημα $(-a,a)$, $[-a,a]$, $[-a,a)$, $(-a,a]$

Ορισμός

Θέτουμε $R=\sup\{|a| : \text{η δυναμοσειρά συγκλίνει στο } x\}$
(ο R λέγεται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς)
Για κάθε $|x|<R$ η δυναμοσειρά συγκλίνει στο x και για κάθε x με $|x|>R$ η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.

Αν $R=0$ η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο 0
Αν $R=+\infty$ -//- -//- -//- $\forall x\in\mathbb{R}$

Θεώρημα

Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ δυναμοσειρά με συντελεστές a_k. Αν υπάρχει το όριο $\lim \sqrt[k]{|a_k|}=a$ και θέτουμε $R=\frac{1}{a}$ (με σύμβαση ότι $\frac{1}{+\infty}=0$, $\frac{1}{a}=+\infty$)

i) $x\in(-R,R)$: συγκλίνει στο x.
ii) $x\notin(-R,R)$: αποκλίνει στο x

Απόδειξη

$[a\in(0,+\infty)]$

α) Αν $|x|<R$ τότε $\lim\sqrt[k]{|a_k x^k|}=\lim|x|\sqrt[k]{a_k}\to|x|\cdot a<1$ από Cauchy η σειρά συγκλίνει (απόλυτα)
β) Αν $|x|>R$ $\sqrt[k]{|a_k x^k|}=|x|\sqrt[k]{a_k}\to|x|\cdot a>1$. άρα από κριτήριο ρίζας Cauchy η $\sum a_k x^k$ συγκλίνει.

Π.χ. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ $\lim\sqrt[k]{|1|}=1\Rightarrow R=\frac{1}{1}=1$

για $x=1$ έχουμε $\sum 1^k$ που αποκλίνει
για $x=-1$ -//- -//- $\sum(-1)^k$ που συγκλίνει

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}x^k$ $a_k=\frac{1}{k^2}$ $\sqrt[k]{|a_k|}=\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}}=\frac{1}{(\sqrt[k]{k})^2}\to\frac{1}{1^2}=\frac{1}{1}=1$

για $x=1$ έχουμε $\sum\frac{1}{k^2}$ που συγκλίνει

για $x=-1$ -//- $\sum\frac{1}{k^2}$ που συγκλίνει (απόλυτα)

Θεώρημα

Έστω $\sum_{k=0} \alpha_k x^k$ μια δυναμοσειρά με μη-μηδενικους συντελεστες

Έστω ότι υπάρχει το $\lim\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| = \alpha$, $\alpha > 0$

Θέτω $R = \frac{1}{\alpha}$

i) αν $x \in (-R, R)$ η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα στο x

ii) αν $x \notin (-R, R)$ η " αποκλίνει στο x.

Απόδειξη

α) Αν $-R < x < R$ δηλαδή $|x| < R$ τότε $\lim_k \left|\frac{\alpha_{k+1} x^{k+1}}{\alpha_k x^k}\right| =$

$$= \lim_k \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} |x| = \alpha |x| < 1$$

από το κριτήριο λόγου του D' Alembert η σειρά $\sum \alpha_k x^k$ συγκλίνει απόλυτα

β) Αν $|x| > R$ τότε $\lim \frac{\alpha_{k+1} x^{k+1}}{\alpha_k x^k} = \alpha |x| > 1$

απ' το κριτήριο λόγου η σειρά $\sum \alpha_k x^k$ αποκλίνει

Π.χ. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$. Θέτω $\alpha_k = \frac{1}{k!}$

$$\frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} = \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to 0 \qquad R = \frac{1}{0} = +\infty$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$ θέτω $\alpha_k = \frac{2^k}{k!}$

$$\frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} = \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}} = \frac{k!}{(k+1)!} \cdot \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1} \to 0$$

$$R = \frac{1}{0} = +\infty$$

Αναδιατάξεις σειρών

Αναδιάταξη των φυσικών είναι μια συνάρτηση $\tau:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ η οποία είναι 1-1 και επί.

Αν η $\sum a_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$; (αναδιάταξη όρων)

Θεώρημα (χωρίς απόδειξη)
Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απόλυτα και $\tau:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 1-1 και επί, τότε η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ συγκλίνει απόλυτα στον ίδιο αριθμό με την προηγούμενη.

Θεώρημα (Riemann)

Αν $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αλλά όχι απόλυτα τότε $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists\ \tau:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 1-1 και επί $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ συγκλίνει στο x, $\forall\ x\in\mathbb{R}$